ある種の競走モデルにおける進行波解について (Mathematical Problems in Biology-'80)

数理解析研究所講究録
385巻 1980年 21-36

ある種の競争モデルにおける進行波解について

京産大 理　細野 雄三
広島大 理　三村 昌泰

1. 序

生態学に現われる拡散を伴なう二種の競争モデルは，一般に半線型放物型方程式

$$(1.1)\quad \begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ v_t = d_2 v_{xx} + \sigma g(u, v) \end{cases}$$

により記述される。方程式 (1.1) は、生態学のみならず，形態形成，化学反応等様々な分野のモデルを含んでおり，この10年間，多くの研究者の注目を集め，その数学的理論も大きく発展してきた。[5] 我々は (1.1) の進行波解に注目するが，それに関してもいくつかの研究がある。[1] Gardner は topological な方法を用いて、(1.1) の進行波解の存在及びその安定性を研究している。[8] また Fife は特異摂動法を用いて $d_1/d_2 \ll 1$ の場合に我々のモデルを含めた型で形式的な議論を展開している。[3] 我々は，Fife と同様，特異摂動法により進行波解の存在とそ

の伝播速度について考察する。とりわけ、伝播速度の符号は $t \to +\infty$ のとき，いずれの種が優越するかを明らかにするという点で、生態学的に重要な意味をもつ。

この報告では，二種の競争関係として次の非線型項

$$(1.2)\quad \begin{cases} f(u,v) = \left(R_1 - a_1 u - \dfrac{b_1 v}{1+eu}\right) u \\ g(u,v) = (R_2 - a_2 v - b_2 u)\, v \end{cases}$$

に制限して考える。更に簡単のため，$R_1 = R_2 = R$，$a_1 = a_2 = a$，$b_1 = b_2 = b$ とする。ここで、R, a, b, e, σ は全て正の定数である。また空間変数を変換することにより，$d_2 = 1$，$\varepsilon^2 = d_1/d_2$ とし，特異摂動法が適用できる，$\varepsilon^2 \ll 1$ の場合を扱う。

2．問題の設定

方程式 (1.1) の進行波解とは、$u(x,t) = u(x-ct)$, $v(x,t) = v(x-ct)$ なる形の解を言う。我々は，伝播速度が遅く，ε オーダであると仮定し，c を改めて $c\varepsilon$ と表し，$z = x - c\varepsilon t$ とおく。まず最初に，(1.1) は２つの定数解，$P_+ = (u_{+\infty}, v_{+\infty}) = (0, R/a)$，$P_- = (u_{-\infty}, v_{-\infty}) = (R/a, 0)$ を持つが，これらは常微分方程式の意味 ($d_1 = d_2 = 0$) で安定である、すなわち

(A.1)　$b/a > 1$

と仮定する。これは、一つの種のみ存在する場合、生存状態が拡散がなければ安定であることを意味する。

我々は，十分遠方では，互いに異なる種が生存しており，これらの二種が衝突したときどの様になるかを考える。その時問題は，方程式

$$(2.1)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_{zz} + c\varepsilon u_z + f(u,v) = 0 \\ v_{zz} + c\varepsilon v_z + \sigma g(u,v) = 0 \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R} = \{z \mid -\infty < z < +\infty\}$$

と境界条件

$$(2.2)\quad \begin{cases} u(+\infty) = u_{+\infty}, \quad v(+\infty) = v_{+\infty} \\ u(-\infty) = u_{-\infty}, \quad v(-\infty) = v_{-\infty} \end{cases}$$

をみたす，$c(\varepsilon)$ 及び $(u(z;\varepsilon,c), v(z;\varepsilon,c))$ を求めることである。(2.1)(2.2) の解を平行移動してもまた解となるから，規格化の条件として

$$(2.3)\quad u(0;\varepsilon,c) = \alpha \in (0, R/a)$$

を加える。また

$$v(0;\varepsilon,c) = \beta \in (0, R/a)$$

と書くが，β は後で ε の関数として決定される。

後で使う記号を述べておく。

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{z \mid z \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- \equiv \{z \mid z \leq 0\},$$

$$X^p_{\rho\varepsilon}(I) \equiv \{u(z) \mid \|u\|_{X^p_{\rho\varepsilon}} \equiv \sup_{z\in I} \sum_{i=0}^{p} e^{\rho|z|} \left|\left(\varepsilon \frac{d}{dz}\right)^i u(z)\right| < +\infty\}$$

$\varepsilon = 1$ のとき，簡単に $X^p_\rho(I)$，$p = 0$ のとき $X_{\rho\varepsilon}(I)$, $X_\rho(I)$ と書く。ここで I は，$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ もしくは $\mathbb{R}$ を表わすものとする。

3. Reduced Problem

(2.1)(2.2)において $\varepsilon = 0$ とおくと、次の Reduced Problem が得られる：

$$(3.1)\quad \begin{cases} f(U,V) = 0 \\ V_{zz} + \sigma g(U,V) = 0 \end{cases}$$

$$(3.2)\quad \begin{cases} U(+\infty) = 0\,,\ V(+\infty) = R/a \\ U(-\infty) = R/a\,, V(+\infty) = 0 \end{cases}.$$

(3.1)(3.2)の解とは，U が区分的に連続であって，$V \in C^1(\mathbb{R})$ かつ U の不連続点を除いて (3.1)(3.2)をみたすものを言う。まず，$f(U,V) = 0$ から $h_\beta(V)$ を次式により定義する（図1）：

$$(3.3)\qquad U \equiv h_\beta(V) = \begin{cases} h_+(V) \equiv 0 & (V > \beta) \\ h_-(V) = \left(Re - a + \sqrt{(Re+a)^2 - 4abeV}\right)/2ae & (V < \beta). \end{cases}$$

ここで β は，$h_\pm$ の定義域をそれぞれ $I_+ (= (0, R/a))$，$I_- (= (0, v_c)$，$v_c = \max\left(R/b, (Re+a)^2/4abe\right))$ としたとき，$I_0 = I_+ \cap I_-$ に属するものとする。$g_\beta(V) = g(h_\beta(V), V)$ と書くと，(3.1)(3.2) は単独方程式に対する次の問題に帰着できる。

$$(3.4)\quad \begin{cases} V_{zz} + \sigma g_\beta(V) = 0 & z \in \mathbb{R} \\ V(+\infty) = R/a\,,\ V(-\infty) = 0 \end{cases}.$$

(3.4) の解の平行移動に関する任意性から，$V(0) = \beta$ としてよい。(3.4)を解くために，まず次の $\mathbb{R}_\pm$ 上の問題に分けそれらの解 $V_\pm(z, \beta)$ を $z = 0$ で C^1 でつなぐという方針をとる。

$$(3.5)_\pm \begin{cases} V_{zz} + \sigma g_\pm(V) = 0 & z \in \mathbb{R}_\pm \\ V(0) = \beta, \quad V(\pm\infty) = U_{\pm\infty} \end{cases}$$

ここで、$g_\pm(V) = g(h_\pm(V), V)$ $(V \in I_\pm)$ である。

Lemma 1 (Fife [7])

仮定(A.1)の下で，任意の $\beta \in I_\pm$ に対して，$(3.5)_\pm$ の狭義単調増大な解 $V_\pm(z, \beta)$ が一意に存在して $X^2_{\mu_\pm}(\mathbb{R}_\pm)$ に属する。更に，$\frac{d}{dz}V(0,\beta)$ は β に関して1階連続微分可能である。ここで $\mu_\pm = \sqrt{-\sigma g'_\pm(U_{\pm\infty})}$ である。∎

次に，$J(\beta) \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{dz}V_-(0,\beta)\right)^2 - \left(\frac{d}{dz}V_+(0,\beta)\right)^2\right] = \int_{U_{-\infty}}^{U_{+\infty}} g_\beta(s)\,ds$ が

(A.2)　$J(\beta)$ は唯一つの零点 $\beta = \beta_0 \in I_0$ をもつ

と仮定すると次のLemmaが成り立つ。

Lemma 2.

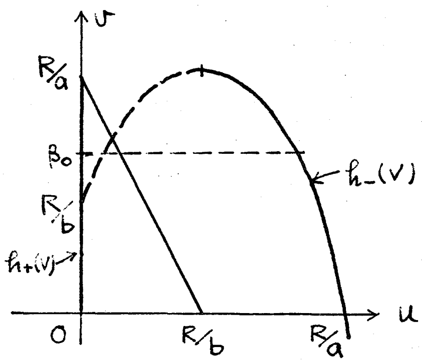
仮定(A.1)(A.2)の下で，$V(0) = \beta$ をみたす(3.4)の狭義単調な解は唯一つ存在して

$$V(z, \beta_0) = \begin{cases} V_+(z, \beta_0) & z \in \mathbb{R}_+ \\ V_-(z, \beta_0) & z \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

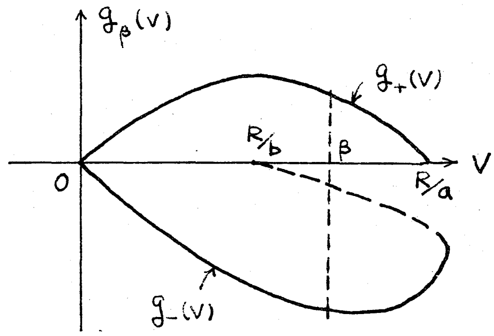
で与えられ，更に $V(z, \beta_0) \in X^1_\rho(\mathbb{R})$ $(\rho = \min(\mu_+, \mu_-))$ である。∎

$U(z, \beta_0) \equiv h(V(z, \beta_0))$ とおくと，$(U(z,\beta_0), V(z,\beta_0))$ は Reduced Problem (3.1)(3.2) の解を与える。

注意．仮定(A.2)は $(Re+a)^2/4abe > R_a$ ならば自動的にみたされる。



(図1)



(図2)

4. 境界層方程式

3. で得られたReduced Problem の解$\bar{v}$は$z=0$で第1種不連続性をもち，従ってその近傍では元の問題の解uの1階及び2階導関数はεが小さくなると大きくなって，$\bar{v}$は真の解を近似していないと予想される。そこで我々は拡張変数$\zeta = z/\varepsilon$を導入して(2.1)を書き換え，その後$\varepsilon = 0$とくと

(4.1) $\quad w_{\zeta\zeta} + c\,w_{\zeta} + f(w, \beta) = 0$

が得られる。境界条件としては

(4.2) $\quad w(\pm\infty) = h_{\pm}(\beta), \; w(0) = \alpha \in (h_{+}(\beta), h_{-}(\beta))$

と与えるのが自然であろう。ここで，$\beta = \beta_0$に十分近い任意の固定した数である。

我々は，β_0に対して更に次の仮定をおく：

(A.3) $\quad \beta_0 > R/b$

注意. (A.3)は $e \gg 1$, $a/b > 3 + \delta$ $(\delta > 0)$ ならば充される。

そのとき，問題は(4.1)(4.2)をみたすcとwを求めることである。

Lemma 3 (Fife & McLeod [6])

仮定(A.1)〜(A.3)の下で，(4.1)(4.2)をみたす解cとwが唯一つ存在し，それらをc_0，$w(\zeta, c_0, \beta)$とすると次の性質をもつ：

(i) $w(\zeta, c_0, \beta)$は狭義単調函数であって，$\zeta \to \pm\infty$のとき平衡値に$O(e^{\tau_\pm \zeta})$で近づく。ここで$\tau_\pm = \left[-c_0 \mp \sqrt{c_0^2 - 4 f_u(h_\pm(\beta), \beta)}\right]/2$である。

(ii) c_0の符号は$\int_{h_+(\beta)}^{h_-(\beta)} f(s)\,ds$の符号と同じである。

ここで，βはβ_0に十分近い任意の数である。∎

後で必要となるwのR_+，R_-上でのcに対する依存性を調べるため次の問題を考える。

$$
(4.3)_\pm \quad \begin{cases} W_{\pm\zeta\zeta} + c\, W_{\pm\zeta} + f(h_\pm(\beta) + W_\pm, \beta) = 0 & \zeta \in R_\pm \\ W_\pm(0) = \alpha - h_\pm(\beta), \quad W_\pm(\pm\infty) = 0 & \end{cases}
$$

Cor. of Lemma 3

c_0に十分近い任意のcと，β_0に十分近い任意のβに対して，仮定(A.1)〜(A.3)の下で$(4.3)_\pm$の狭義単調な解$W_\pm(\zeta, c, \beta)$がそれぞれ唯一つ存在して

$$
(4.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{dW_+}{d\zeta}(0, c, \beta)\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{dW_-}{d\zeta}(0, c, \beta)\right)\right]_{c=c_0} \neq 0
$$

が成り立つ。

5. 半空間 $\mathbb{R}_\pm$ 上での解の存在

(2.1)(2.2)の解の存在を示すため，(2.1)(2.2)を $\mathbb{R}_\pm$ 上へ制限し次の問題を考える：

$$(5.1)_\pm \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_{\pm zz} + c\varepsilon u_{\pm z} + f(u_\pm, v_\pm) = 0 \\ v_{\pm zz} + c\varepsilon v_{\pm z} + \sigma g(u_\pm, v_\pm) = 0 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}_\pm$$

$$(5.2)_\pm \quad \begin{cases} u_\pm(0) = \alpha, \quad v_\pm(0) = \beta \\ u_\pm(\pm\infty) = u_{\pm\infty}, \quad v(\pm\infty) = v_{\pm\infty} . \end{cases}$$

$(5.1)_\pm(5.2)_\pm$ の解をそれぞれ

$$(5.3)_\pm \quad \begin{cases} u_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) = U_\pm(z, \beta) + W_\pm(\zeta, \beta, c) + r_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) \\ v_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) = V_\pm(z, \beta) + s_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}_\pm$$

の型で求める。ここで c, β は c_0, β_0 に十分近い任意の数であり，$\lambda = (c, \beta)$, $\lambda_0 = (c_0, \beta_0)$, λ_0 の δ－近傍を Λ_δ と書く。

以下，この節では，$\mathbb{R}_+$ 上のみで考え，＋の添字は省略する。

(5.1)(5.2)を (r, s) に対する問題に書き直すと

$$(5.4) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^2 r_{zz} + c\varepsilon r_z + f_u r + f_v s + N_1(r, s) \\ s_{zz} + c\varepsilon s_z + \sigma g_v s + \sigma g_u r + N_2(r, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$(5.5) \qquad r(0) = s(0) = 0, \quad r(+\infty) = s(+\infty) = 0$$

となる。ここで，$f_u = f_u(U+W, V)$ であり，f_v, g_u, g_v も同様，N_1, N_2 は r, s に関する２次以上の非線型項，k_1，k_2 は

$$k_1 = -\{\varepsilon^2 U_{zz} + c\varepsilon U_z + W_{\zeta\zeta} + cW_\zeta + f(U+W, V)\}$$

$$k_2 = -\{V_{zz} + c\varepsilon V_z + \sigma g(U+W, V)\}$$

である。我々は更に函数空間 $C_0^1 = \{s \mid s \in C^1(\mathbb{R}_+), s(0) = 0\}$, $\tilde{X}_{\rho\varepsilon}^p = \{r \mid r \in X_{\rho\varepsilon}^p, r(0)\}$, $X_{\varepsilon 0} = \tilde{X}_{\rho\varepsilon}^2 \times (H_2 \cap C_0^1)$, $Y = X_\rho \times L_2$ を導入する。$t = {}^t(r, s)$ と書いて，(5.4)左辺の非線型作用素を $\Phi(t, \varepsilon, \lambda): X_{\varepsilon 0} \to Y$ と表わす。t に関する Φ の Frechet 微分を Φ_t と書く。ここで，$\rho = \min(\mu_+, \mu_-)$ と固定しておく

まず，$M_\varepsilon: H_2 \cap C_0^1 \to L_2$ を

$$M_\varepsilon \equiv \frac{d^2}{dz^2} + c\varepsilon \frac{d}{dz} + \sigma g_v(U+W, V)$$

で定義する。

Lemma 4.

仮定 (A.1)の下で，十分小さい正の数 ε_0 と δ_0 が存在して，$0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ なる任意の ε と，$\lambda \in \Lambda_\delta (\delta < \delta_0)$ なる任意の λ に対して，M_ε は一様に有界な逆作用素 $M_\varepsilon^{-1}: L_2 \to H_2 \cap C_0^1$ をもつ。∎

注意．$\mathbb{R}^-$ 上で Lemma 4 を示すには，σ が十分小さいという仮定が我々の証明方法では必要となる。

次に，$L_\varepsilon: \tilde{X}_{\rho\varepsilon}^2 \to X_\rho$ を

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} + c\varepsilon \frac{d}{dz} + f_u(U+W, V)$$

で定義する。

Lemma 5. (Key lemma)

仮定 (A.1)～(A.3)の下で，十分小さい正の数 ε_1 と δ_1 が存在して，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる任意の ε と，$\lambda \in \Lambda_\delta (\delta < \delta_1)$ なる任意の λ に対して，L_ε は一様に有界な逆作用素 $L_\varepsilon^{-1}: X_\rho \to \tilde{X}_{\rho\varepsilon}^2$

をもつ。∎

<u>Lemma 6.</u>

非線型作用素$\mathcal{T}(t,\varepsilon,\lambda)$は次の性質をもつ：

(1) 任意の$t_1, t_2 \in X_\varepsilon$に対し，$\varepsilon$と$\lambda$に独立な定数$K_1>0$が存在して，$\|T_t(t_1,\varepsilon,\lambda)-T_t(t_2,\varepsilon,\lambda)\|_{X_\varepsilon\to Y} \leq K_1\|t_1-t_2\|_{X_\varepsilon}$.

(2) σが十分小さければ，$T_t(0,\varepsilon,\lambda): X_\varepsilon \to Y$は$\varepsilon$と$\lambda$に関して一様に有界な逆作用素をもつ。

(3) εとλに依存しない正の定数K_2が存在して，$\|N(0,\varepsilon,\lambda)\|_Y \leq K_2\sqrt{\varepsilon}$が成り立つ。

ただし，(A.1)～(A.3)はみたされ，εとλはLemma 4, 5の条件をみたすものとする。∎

証明はHosono & Mimura [9] Lemma 15とほとんど同じである。

Lemma 6. によりFife [2]による陰函数の定理が適用できて次の定理が成り立つ。

<u>Theorem 7.</u>

(A.1)～(A.3)を仮定し，σは十分小さいとする。そのときあるε_0とδ_0が存在して，任意のε ($0<\varepsilon<\varepsilon_0$)と$\lambda\in\Lambda_\delta$ ($\delta<\delta_0$)に対して，次の様な函数$t(\varepsilon,\lambda)\in X_\varepsilon$が存在する

(1) $\mathcal{T}(t(\varepsilon,\lambda),\varepsilon,\lambda) = 0$

(2) $\lim_{\varepsilon\to+0}\|t(\varepsilon,\lambda)\|_{X_\varepsilon} = 0$ （$\lambda\in\Lambda_\delta$に関して一様）

(3) $t(\varepsilon,\lambda)$はεとλに関して$\|\cdot\|_{X_\varepsilon}$の位相で一様連続。∎

Theorem 7 により、問題$(5.1)_+(5.2)_+$の解の存在が示された。$\mathbb{R}_-$上の問題$(5.1)_-(5.2)_-$に対しても Theorem 7 と全く同じ結果が成り立つ。

6. 全空間$\mathbb{R}$での解の存在

前節で求まった$\mathbb{R}_+$上の解(u_+, v_+)と$\mathbb{R}_-$上の解(u_-, v_-)をβとcを適当に選ぶことにより、$z=0$でC^1でつなぐことができれば、我々の問題(2.1)(2.2)の解が得られることになる。そのため次の2つの量を考える

$$(6.1)\quad \begin{cases} \Phi(\varepsilon,\beta,c) = \dfrac{d}{d\xi}u_+(0,\varepsilon,\beta,c) - \dfrac{d}{d\xi}u_-(0,\varepsilon,\beta,c) \\ \Psi(\varepsilon,\beta,c) = \left(\dfrac{d}{dz}v_+(0,\varepsilon,\beta,c)\right)^2 - \left(\dfrac{d}{dz}v_-(0,\varepsilon,\beta,c)\right)^2 \end{cases}$$

十分小さいε_0とδ_0に対して$D=\{(\varepsilon,\beta,c) \mid 0<\varepsilon<\varepsilon_0, (\beta,c)\in\Lambda_{\delta_0}\}$とおくと，Theorem 7 (3)により$\Phi(\varepsilon,\beta,c)$，$\Psi(\varepsilon,\beta,c)$は$D$上で一様連続となり、従って$\bar{D}$上へ連続的に$\Phi$と$\Psi$を拡張しておく。Theorem 7 (2)により

$$\begin{cases} \Phi(0,\beta,c) = \dfrac{d}{d\xi}W_+(0,c,\beta) - \dfrac{d}{d\xi}W_-(0,c,\beta) \\ \Psi(0,\beta,c) = \left(\dfrac{d}{dz}V_+(0,\beta)\right)^2 - \left(\dfrac{d}{dz}V_-(0,\beta)\right)^2 = 2J(\beta) \end{cases}$$

となる。$\Phi(0,\beta_0,c_0)=\Psi(0,\beta_0,c_0)=0$であり，$\Phi(0,\beta_0,c)=\Phi_0(c)$，$\Psi(0,\beta,c)=\Psi_0(\beta)$とおくと，Cor. of Lemma 2 と$\frac{d}{d\beta}J(\beta)<0$に注意すると，$\Phi_0(c)$と$\Psi_0(\beta)$は共に孤立した零点$\beta=\beta_0$と$c=c_0$をもち，それぞれ$\beta=\beta_0$，$c=c_0$を通過するとき符号を

変える。それ故、陰函数の定理（Fife [2] Theorem 4.3）が適用できて次のLemmaが成り立つ。

Lemma 8.

十分小さい $\varepsilon>0$ に対して，ε の函数 $\beta(\varepsilon), c(\varepsilon)$ が存在して，$\Phi(\varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)) = \Psi(\varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)) = 0$，$\lim_{\varepsilon\to+0}\beta(\varepsilon)=\beta_0$，$\lim_{\varepsilon\to+0} c(\varepsilon) = c_0$ をみたす。∎

Lemma 8 により

$$u(z,\varepsilon) = \begin{cases} u_+(z,\varepsilon,c(\varepsilon),\beta(\varepsilon)), & z\in\mathbb{R}_+ \\ u_-(z,\varepsilon,c(\varepsilon),\beta(\varepsilon)), & z\in\mathbb{R}_- \end{cases},\quad v(z,\varepsilon) = \begin{cases} v_+ & z\in\mathbb{R}_+ \\ v_- & z\in\mathbb{R}_- \end{cases}$$

は共に $C^1(\mathbb{R})$ に属することが解りこれが (2.1)(2.2) の解を与える。

Theorem 9. (Main Theorem)

(A.1)～(A.3)を仮定し，σは十分小さいとする。そのとき十分小さい $\varepsilon>0$ に対して (2.1)(2.2) の解 $u(z,\varepsilon), v(z,\varepsilon)$ が存在して，$\varepsilon\to+0$ のとき

$$\|u-(U+W)\|_{X^1_{p\varepsilon}(\mathbb{R})}\to 0,\quad \|v-V\|_{X^1_p(\mathbb{R})}\to 0$$

が成り立つ。更に速度 $c(\varepsilon)$ は一意に決まり，その主要項 $c(0)$ の符号は $\int_{h_+(\beta_0)}^{h_-(\beta_0)} f(s,\beta_0)\,ds$ の符号と同じである。∎

7. Appendices

Lemma 4 と Lemma 5 の証明の概略を述べる。ここでの議論

は再び$\mathbb{R}_+$上に制限するが，$\mathbb{R}_-$上での議論は方針は全く同じであるが，若干複雑になることだけを注意しておく。

1) Lemma 4 の証明の概略

Reduced Problem の解 V に対して，$\psi = dV/dz$ とおくと ψ は

$$(7.1)\quad \begin{cases} M_0\psi \equiv \dfrac{d^2}{dz^2}\psi + \sigma g_v(U, V)\psi = 0 \\ \psi(0) \neq 0 , \ \psi(z) > 0 \end{cases}$$

をみたし $X_\rho^2(\mathbb{R}_+)$ に属する。従って，ψ を用いて Green 函数を構成することにより，問題

$$(7.2)\quad M_0 S = k , \ S(0) = 0 , \ S \in L^2$$

は，$^\forall k \in L^2$ に対して唯一つの解 $S \in H_2 \cap C_0^1$ を持つことがわかる。問題

$$(7.3)\quad M_\varepsilon S = k , \ S(0) = 0 , \ S \in L^2 \quad (k \in L^2),$$

は M_0^{-1} を用いて次の積分方程式に書き換えられる：

$$(7.4)\quad S = - M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)S + M_0^{-1}k$$

ここで，$M_\varepsilon - M_0 = c\varepsilon\dfrac{d}{dz} + \sigma\{g(U+W) - g(U)\}$ である。$M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)$ を部分積分を用いて書き換えることにより

$$\| M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)\|_{L^2 \to L^2} = O(\varepsilon)$$

が成り立ち，従って ε を十分小さくとると (7.4) は L^2 での縮小写像となり Lemma 4 が成り立つ。

2) Lemma 5 の証明の概略

L_ε を z 変数で表わすと

(7.5) $$L_\varepsilon = \frac{d^2}{d\zeta^2} + c\frac{d}{d\zeta} + f_u(U(\varepsilon\zeta)+W(\zeta), V(\varepsilon\zeta))$$

となる。$-g_1(\zeta,\varepsilon) = f_u(U(\varepsilon\zeta)+W(\zeta), V(\varepsilon\zeta)) - f_u(U(0)+W(\zeta), V(0))$,

$-g_0(\zeta) = f_u(U(0)+W(\zeta), V(0)) - f_u(U(0), V(0))$, $-\gamma_0^2 = f_u(U(0), V(0))$

とおくと、$f_u(U(\varepsilon\zeta)+W(\zeta), V(\varepsilon\zeta)) = -\gamma_0^2 - g_1(\zeta,\varepsilon) - g_0(\zeta)$ となる。

<u>Lemma A.</u>

ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$) に対して，

(1) $-\gamma^2 \equiv -\gamma_0^2 - g_1(\zeta,\varepsilon) \leq -\delta_0^2 < 0$. ここで δ_0 は ε に関して独立である。

(2) $dg_1/d\zeta = O(\varepsilon)$.

(3) $g_0 = O(e^{\tau_+\zeta})$.

が成り立つ。但し $\zeta \geq 0$。∎

$f_u(U(0)+W(\zeta), V(0)) = -\gamma_0^2 - g_0(\zeta)$ に注意して，L_0 を

(7.6) $$L_0 = \frac{d^2}{d\zeta^2} + c\frac{d}{d\zeta} + f_u(U(0)+W(\zeta), V(0))$$

で定義する。問題 $L_\varepsilon v_\varepsilon = k$, $v_\varepsilon(0) = 0$, $v_\varepsilon(+\infty) = 0$ と $u_\varepsilon = {}^t(v_\varepsilon, \frac{dv_\varepsilon}{d\zeta})$ とおいて，1階の方程式系に書き直すと，$L_\varepsilon v_\varepsilon = k$ は

(7.7)$_\varepsilon$ $$\frac{du_\varepsilon}{d\zeta} = A_\varepsilon u_\varepsilon + B_0 u_\varepsilon + f$$

となる。ここで $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2 & c \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ である。

$\gamma^2 \geq \delta_0^2 > 0$ に注意すると，ある正則な行列 P_ε が存在して $P_\varepsilon^{-1} \cdot A_\varepsilon P_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$: diagonal とできる。変数変換 $u_\varepsilon = P_\varepsilon w_\varepsilon$ により (7.7) は

(7.8)$_\varepsilon$ $$\frac{dw_\varepsilon}{d\zeta} = \Lambda_\varepsilon w_\varepsilon + P_\varepsilon^{-1}\left(B_0 P_\varepsilon + \frac{dP_\varepsilon}{d\zeta}\right) w_\varepsilon + P_\varepsilon^{-1} f, \quad (w_\varepsilon = {}^t(w_{1\varepsilon}, w_{2\varepsilon}))$$

と書ける。ここで $\Lambda_\varepsilon = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$　$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ である。

$(7.8)_\varepsilon$ を境界条件 $(7.9)_\varepsilon$ $w_{1\varepsilon}(0) = \alpha$, $w(+\infty) = 0$ の下で考える。

Lemma B

任意の $f \in (X_p)^2$ に対して，$(7.8)_0 (7.9)_0$ の解 $w_0 \in (X_p^1)^2$ が唯一つ存在して，$\| w_0 \|_{(X_p^1)^2} \leq C \| f \|_{(X_p)^2}$ が成り立つ。∎

$K_\varepsilon \equiv \frac{d}{d\xi} - \Lambda_\varepsilon$ が境界条件 $(7.9)_\varepsilon$ の下で ε に関して一様に有界な逆作用素 $K_\varepsilon^{-1}: (X_p)^2 \to (X_p^1)^2$ を持つことに注意して $(7.8)_\varepsilon$ $(7.9)_\varepsilon$ を積分方程式で表わすと

$$
\begin{aligned}
w_\varepsilon &= K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon w_\varepsilon + K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f \\
&= K_0^{-1} D_0 w_\varepsilon + (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0) w_\varepsilon + K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

となる。ここで，$D_\varepsilon = P_\varepsilon^{-1}\left(B_0 P_\varepsilon + \frac{dP_\varepsilon}{d\xi}\right)$, $D_0 = P_0^{-1} B_0 P_0$ である。

この両辺に再び K_0 を作用させると

$$
\frac{d}{d\xi} w_\varepsilon = (\Lambda_0 + D_0) w_\varepsilon + K_0 (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0) w_\varepsilon + K_0 K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f \tag{7.11}
$$

が得られる。

Lemma C

十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の ε $(0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ に対して，$\| K_0 (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0) \|_{(X_p)^2 \to (X_p)^2} = O(\varepsilon)$ が成り立つ。∎

Lemma B と C を合せて (7.10) が $(X_p)^2$ から $(X_p)^2$ への縮小写像になることがわかり，変数を元に戻すことにより Lemma 5 が成り立つ。

References

[1] Aronson, D. G., Weinberger, H. F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation, Lec. notes in Math., No 446, Springer, Berlin (1975).

[2] Fife, P. C. Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations, J. Math. Anal. Appl., 54, 497-521 (1976).

[3] Fife, P. C. Asymptotic analysis of reaction-diffusion wave fronts, Rocky Mt. J. Math., 7, 389-415 (1977).

[4] Fife, P. C. Asymptotic states for equations of reaction and diffusion, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 5, 693-726 (1978).

[5] Fife, P. C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Lec. Notes in Biomath., 28, Springer, Berlin, (1979).

[6] Fife, P. C., McLeod, J. B. The approach of nonlinear diffusion equations to travelling wave solutions, Bull. Amer. Math. Soc., 81, 1075-1078 (1975).

[7] Fife, P. C. Singular perturbation and wave front techniques in reaction-diffusion problems, SIAM-AMS Proceedings, 10, 23-49 (1976).

[8] Gardner, R. Private communication.

[9] Hosono, Y., Mimura, M. Singular perturbations for pairs of two-point boundary value problems of Neumann type, Lec. Notes in Num. Appl. Anal., 2, 79-138 (1980).

[10] Mimura, M., Tabata, M., Hosono, Y. Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, to appear in SIAM J. Math. Anal.